

۵- گزینه ۱ فرض کنید A پیشامد این باشد که مجموع اعداد رو شده فرد و B پیشامد این باشد که حداقل یکی از تاس‌های رو شده برابر ۲ باشد. باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

راه حل اول می‌توان نوشت

توجه کنید برای اینکه مجموعه اعداد رو شده فرد باشد، تعداد عددهای فرد رو شده باید فرد شود. پس

$$n(A) = \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{\text{هر سه عدد رو شده فرد باشند}} + \underbrace{\binom{3}{1} \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{یک عدد فرد و دو عدد دیگر زوج باشند}} = 27 + 81 = 108$$

اکنون توجه کنید که $n(A \cap B)$ برابر تعداد حالت‌هایی است که مجموع اعداد رو شده فرد باشد و حداقل یکی از اعداد رو شده برابر ۲ باشد. برای محاسبه $n(A \cap B)$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول در دو پرتاب عدد ۲ و در یک پرتاب عدد فرد ظاهر شود که تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{3}{2} \times 1 \times 1 \times 3 = 9$$

حالت دوم در یک پرتاب عدد ۲، در یک پرتاب عدد زوج غیر از ۲ و در یک پرتاب عدد فرد ظاهر شود که تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{3}{2} \times 1 \times \binom{2}{1} \times 2 \times 3 = 36$$

بنابراین $n(A \cap B) = 9 + 36 = 45$. در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12}$$

راه حل دوم می‌توان نوشت

$$P(B|A) = 1 - P(B'|A) = 1 - \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = 1 - \frac{n(A \cap B')}{n(A)}$$

توجه کنید که $n(A \cap B')$ برابر تعداد حالت‌هایی است که مجموع اعداد رو شده فرد باشد، ولی هیچ‌یک از اعداد رو شده برابر ۲ نباشد. برای محاسبه $n(A \cap B')$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول در هر سه پرتاب عدد فرد ظاهر شود که تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

حالت دوم در دو پرتاب عدد زوج غیر از ۲ و در یک پرتاب عدد فرد ظاهر شود که تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{3}{2} \times 2 \times 2 \times 3 = 36$$

بنابراین $n(A \cap B') = 27 + 36 = 63$. در نتیجه

$$P(B|A) = 1 - \frac{n(A \cap B')}{n(A)} = 1 - \frac{63}{108} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

نتیجه می‌گیریم $n(A \cap B) = 9 + 54 = 63$. بنابراین $P(B|A) = \frac{63}{108} = \frac{7}{12}$

پاسخ کنکور ۹۹

۱- گزینه ۲ رقم یکان عدد مورد نظر برابر صفر یا ۵ است. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم که رقم یکان برابر صفر یا ۵ باشد.

حالت اول

$$\overset{\text{صفر}}{\textcircled{1}} \textcircled{9} \textcircled{8} \textcircled{7} = 504$$

حالت دوم

$$\overset{5}{\textcircled{1}} \textcircled{9} \textcircled{8} \textcircled{7} = 448$$

نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $504 + 448 = 952$ است.

۲- گزینه ۴ هر جمله از بسط $(a+b+c)^{12}$ به صورت $a^x b^y c^z$ است که x, y و z عددهایی صحیح و نامنفی‌اند و $x+y+z=12$. بنابراین تعداد جملات در بسط $(a+b+c)^{12}$ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x+y+z=12$ است. در نتیجه پاسخ برابر است با

$$\binom{14}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر ۳ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۳ کتاب ریاضی از جعبه برداریم، در بین ۸ کتاب انتخاب شده، ۴ کتاب که از یک موضوع باشند، وجود ندارد. ولی اگر ۹ کتاب انتخاب کنیم، با توجه به اینکه حداکثر ۲ تا از آنها مربوط به هنر است، حداقل ۷ تا از کتاب‌ها از دو موضوع ادبی و ریاضی هستند، پس حداقل ۴ تا از آنها مربوط به یکی از این دو موضوع است.

۴- گزینه ۳ فرض کنید A این پیشامد باشد که عدد انتخاب شده مضرب ۳ و B این پیشامد باشد که عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشد. تعداد اعداد دورقمی برابر $90 = \textcircled{9} \textcircled{10}$ است. چون از هر سه عدد متوالی دقیقاً یکی مضرب ۳ و از هر پنج عدد متوالی دقیقاً یکی مضرب ۵ است، پس در بین اعداد دورقمی (که ۹۰ عدد متوالی‌اند) دقیقاً $\frac{90}{3} = 30$ تا مضرب ۳ و $\frac{90}{5} = 18$ تا مضرب ۵ هستند. بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

توجه کنید که $A \cap B$ پیشامد این است که عدد انتخاب شده بر هر دو عدد ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی این عدد مضرب ۱۵ باشد. چون از هر پانزده عدد متوالی دقیقاً یکی مضرب ۱۵ است، پس

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

نتیجه می‌گیریم احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

باقی مانده تقسیم توان‌های ۲ را بر اعداد ۷ و ۳۱ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 16, 2^5 \equiv 31 \Rightarrow 2^k \equiv 1 \\ 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 16, 2^5 \equiv 31 \Rightarrow 2^{5k} \equiv 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 2^n \equiv 1 \\ 2^{31} \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3|n \\ 31|n \end{cases} \Rightarrow 15|n \Rightarrow n=15k$$

بنابراین به ازای n ‌های بخش‌پذیر بر ۱۵، $2^n - 1$ بر ۲۱۷ بخش‌پذیر است. برای محاسبه تعداد اعداد دورقمی که بر ۱۵ بخش‌پذیرند، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$10 \leq 15k \leq 99 \Rightarrow 1 \leq k \leq 6$$

پس ۶ عدد دورقمی بر ۱۵ بخش‌پذیرند و پاسخ برابر ۶ است.

۱۱- گزینه ۲

با توجه به اینکه C یک رقم است، با امتحان کردن مقادیر مختلف C جواب را به دست می‌آوریم. جواب مورد نظر به ازای $C=8$ به دست می‌آید، در واقع $88^2 = 7744$. پس $a=7$ و $b=4$ ، بنابراین $a-b=3$.

۱۲- گزینه ۴

برای رسم گراف دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول دو رأس درجه ۴ غیرمجاور باشند.

در این حالت هر رأس درجه ۴ باید به هر ۴ رأس درجه ۲ وصل باشد و گراف به صورت مقابل می‌شود. از روی این شکل معلوم است که هر دو رأس درجه ۲ به همراه رأس‌های درجه ۴ تشکیل یک دور می‌دهند. بنابراین تعداد

$$\text{دوره‌های این گراف برابر } \binom{4}{2} = 6 \text{ است.}$$

حالت دوم دو رأس درجه ۴ مجاور باشند.

در این حالت هر رأس درجه ۴ به ۳ تا از رئوس درجه ۲ وصل می‌شود و گراف به صورت مقابل می‌شود. از روی این شکل معلوم است که گراف دو دور به طول ۳، دو دور به طول ۴ و دو دور به طول ۵ دارد. بنابراین این گراف نیز ۶ دور دارد.

$$a, b, c, a; \quad a, b, d, a; \quad a, c, b, d, a; \quad a, b, f, e, a$$

$$a, c, b, f, e, a; \quad a, d, b, f, e, a$$

در نتیجه گراف حاصل همواره دارای ۶ دور است.

۱۳- گزینه ۱

رأس d توسط مجموعه $\{a, e, g\}$ احاطه نمی‌شود،

بنابراین $\{a, e, g\}$ مجموعه احاطه‌گر گراف داده شده نیست.

۱۴- گزینه ۲

می‌دانیم تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی زوج است، بنابراین در یک گراف ۷ رأسی K -منتظم، K عددی زوج است (زیرا اگر K عددی فرد باشد، این گراف ۷ رأس فرد خواهد داشت که می‌دانیم چنین چیزی امکان‌پذیر نیست). در ضمن می‌دانیم و در گراف ۷ رأسی، درجه هیچ رأسی از ۶ بیشتر نیست، پس K برابر یکی از اعداد ۰، ۲، ۴ و ۶ است. اما اگر $K=0$ ، گراف تهی خواهد بود و اگر $K=6$ ، گراف کامل خواهد بود، که طبق فرض می‌دانیم این گونه نیست. پس برای K فقط دو مقدار ۲ و ۴ قابل قبول است.

۶- گزینه ۲ فرض کنید B_i پیشامد انتخاب ظرف i ام و A پیشامد

این باشد که لااقل یکی از دو مهره انتخاب شده سیاه باشد. در این صورت طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}\right) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$$

۷- گزینه ۲

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(B|A') &= \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{1-P(A)} = \frac{P(B)-P(B \cap A)}{1-P(A)} \\ &= \frac{P(B)-P(A)P(B|A)}{1-P(A)} = \frac{0/3 - 0/4 \times 0/25}{1-0/4} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۸- گزینه ۲

باید تعداد اعداد طبیعی k را بیابیم به طوری که

$$9k = 430q + q^2, \quad 0 \leq q^2 < 430.$$

از رابطه $q^2 < 430$ نتیجه می‌گیریم $q \leq 20$. همچنین $q \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $k=0$ ، که قابل قبول نیست، پس $0 < q \leq 20$. در ضمن از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$430q + q^2 \equiv 0 \pmod{430} \Rightarrow 2q + q^2 \equiv 0 \pmod{430}$$

$$q^2 - 2q \equiv 0 \pmod{430} \Rightarrow q(q-2) \equiv 0 \pmod{430}$$

بنابر این q عددی به فرم $9t$ یا $4t+2$ است و چون $0 < q \leq 20$ ، پس مقادیر قابل قبول برای q عبارتند از: $\{2, 9, 11, 18, 20\}$. در نتیجه پاسخ برابر ۵ است.

۹- گزینه ۴

دو عدد مورد نظر را a و b می‌نامیم. طبق فرض

$$[a, b] = 60(a, b), \quad a+b = 136$$

فرض کنید $(a, b) = d$ ، $a = a'd$ و $b = b'd$ که $(a', b') = 1$. در این صورت

$$\begin{cases} \frac{ab}{d} = 60d \\ a'd + b'd = 136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a'd b'd}{d} = 60d \\ (a' + b')d = 136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'b' = 60 \\ (a' + b')d = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{a', b'\} = \{1, 60\} \vee \{3, 20\} \vee \{4, 15\} \vee \{5, 12\} \\ a' + b' | 136 \end{cases}$$

(توجه کنید که چون $(a', b') = 1$ ، لذا $\{a', b'\}$ برابر $\{2, 30\}$ یا $\{6, 10\}$ نمی‌تواند باشد.) از آنجا که ۱۳۶ بر $1+60$ ، $3+20$ و $4+15$ بخش‌پذیر نیست، نتیجه می‌گیریم $\{a', b'\} = \{5, 12\}$. بنابراین

$$(a' + b')d = 136 \Rightarrow 17d = 136 \Rightarrow d = 8$$

$$\{a, b\} = \{a'd, b'd\} = \{40, 96\} \Rightarrow |a-b| = 56$$

۱۰- گزینه ۳

تجزیه عدد ۲۱۷ به صورت 7×31 است. بنابراین

$$217 | 2^n - 1 \Rightarrow 7 | 2^n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^n \equiv 1 \\ 31 | 2^n - 1 \end{cases}$$

۱۹- گزینه ۲ فرض کنید A پیشامد این باشد که مجموع اعداد رو شده فرد و B پیشامد این باشد که حداقل یکی از تاس‌های رو شده برابر ۳ باشد. باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. می‌توان نوشت

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

توجه کنید برای اینکه مجموع اعداد رو شده فرد باشد، تعداد عددهای فرد رو شده باید فرد شود. پس

$$n(A) = \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{\text{هر سه عدد رو شده فرد باشند}} + \underbrace{\binom{3}{1} \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{یک عدد فرد و دو عدد دیگر زوج باشند}} = 27 + 81 = 108$$

اکنون توجه کنید که $n(A \cap B)$ برابر تعداد حالت‌هایی است که مجموع اعداد رو شده فرد باشد و حداقل یکی از اعداد رو شده برابر ۳ باشد. برای محاسبه $n(A \cap B)$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول در دو پرتاب عدد زوج و در یک پرتاب عدد ۳ ظاهر شود که تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{3}{2} \times 3 \times 3 \times 1 = 27$$

حالت دوم در هر سه پرتاب عدد فرد ظاهر شود که دست کم یکی از آن‌ها برابر ۳ است. در $3^3 = 27$ حالت در هر سه پرتاب عدد فرد ظاهر می‌شود که در $2^3 = 8$ تایی آن‌ها، هیچ‌یک از اعداد رو شده ۳ نیستند. پس تعداد راه‌های ممکن برابر است با $27 - 8 = 19$. بنابراین $27 + 19 = 46 = n(A \cap B)$. در نتیجه

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{46}{108} = \frac{23}{54}$$

توجه این عدد در گزینه‌ها وجود ندارد!

۲۰- گزینه ۱ فرض کنید B پیشامد سفید بودن مهره اول باشد و A پیشامد این باشد که حداقل یکی از دو مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد. طبق قانون احتمال کل،

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$= \frac{6}{9} \times \left(1 - \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}\right) + \frac{3}{9} \times \left(1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}\right) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{10}{45}\right) + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{15}{45}\right) \\ = \frac{2}{3} \times \frac{35}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{30}{45} = \frac{70 + 30}{3 \times 45} = \frac{100}{135} = \frac{20}{27}$$

۲۱- گزینه ۳ چون A و B مستقل‌اند، پس $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

از این که $P(A \cap B) = 0/1$ نتیجه می‌گیریم $P(A)P(B) = 0/1$. همچنین

$$P(A \cup B) = 0/6 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6$$

$$P(A) + P(B) - 0/1 = 0/6 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0/7$$

بنابراین اگر $P(A) = a$ و $P(B) = b$ ، آنگاه $ab = 0/1$ و $a + b = 0/7$. پس

$$a \text{ و } b \text{ جواب‌های معادله } x^2 - 0/7x + 0/1 = 0 \text{ هستند. از تساوی}$$

$$x^2 - 0/7x + 0/1 = (x - 0/2)(x - 0/5)$$

نتیجه می‌گیریم یکی از a و b برابر $0/2$ و دیگری برابر $0/5$ است. اما طبق فرض $P(B') > P(B)$ پس

$$1 - P(B) > P(B) \Rightarrow 2P(B) < 1 \Rightarrow P(B) < \frac{1}{2} \Rightarrow b < 0/5$$

پس $b = 0/2$.

۱۵- گزینه ۱ **راه‌حل اول** تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری برابر

$$\binom{9}{9} \binom{8}{8} \binom{7}{7} = 4536$$

است که از این تعداد، تعداد آن‌هایی که رقم ۵ را ندارند، برابر

$$\binom{8}{8} \binom{7}{7} \binom{6}{6} = 2688$$

است. بنابراین پاسخ برابر $4536 - 2688 = 1848$ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول رقم ۵ در مرتبه هزارگان باشد. در این صورت تعداد اعداد با ویژگی

$$\binom{1}{1} \binom{9}{9} \binom{8}{8} \binom{7}{7} = 504$$

مطلوب برابر است با

حالت دوم رقم ۵ در مرتبه هزارگان نباشد. در این صورت تعداد اعداد با ویژگی

$$3 \times \binom{8}{8} \binom{7}{7} \binom{6}{6} = 1344$$

مطلوب برابر است با

$$504 + 1344 = 1848$$

در نتیجه، پاسخ برابر است با

۱۶- گزینه ۴ **راه‌حل اول** تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$x + y + z + t = 11 \text{ برابر } \binom{14}{3} \text{ است. همچنین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله با شرط } x \geq 5 \text{ برابر } \binom{9}{3} \text{ است. بنابراین}$$

$$\binom{14}{3} - \binom{9}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3!} - \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 364 - 84 = 280$$

جواب‌های صحیح و نامنفی معادله با شرط $x < 5$ برابر است با

$$\binom{14}{3} - \binom{9}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{3!} - \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 364 - 84 = 280$$

راه‌حل دوم چون $x \in \mathbb{Z}$ ، پس فرض $x < 5$ را فرض $x \leq 4$ معادل است. با

عدگذاری به جای x ، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله را در هر حالت می‌یابیم و باهم جمع می‌کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow y + z + t = 11 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{13}{2} = 78$$

$$x = 1 \Rightarrow y + z + t = 10 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{12}{2} = 66$$

$$x = 2 \Rightarrow y + z + t = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{11}{2} = 55$$

$$x = 3 \Rightarrow y + z + t = 8 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{10}{2} = 45$$

$$x = 4 \Rightarrow y + z + t = 7 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{9}{2} = 36$$

بنابراین تعداد کل جواب‌ها با ویژگی‌های مطلوب برابر است با

$$78 + 66 + 55 + 45 + 36 = 280$$

۱۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر ۱۱ عدد زیر را انتخاب کنیم،

هیچ دو تا مقسوم‌علیه مشترکی بزرگ‌تر از یک ندارند.

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

اما اگر ۱۲ عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, 30\}$ انتخاب کنیم، چون غیر از عدد یک، هر عددی از این مجموعه حداقل بر یکی از ۱۰ عدد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ بخش‌پذیر است، پس حداقل دو تا از ۱۲ عدد مقسوم‌علیه مشترکی بزرگ‌تر از ۱ دارند.

۱۸- گزینه ۳ فرض کنید A پیشامد رو شدن حداقل یک بار عدد ۶

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

باشد. در این صورت

۲۶- گزینه ۴ نمودار گراف داده شده به صورت زیر است. دورهای به

طول ۴ در این گراف عبارتند از:

b, c, d, e, b ; b, c, d, f, b ; b, c, e, d, b ;

b, c, e, f, b ; b, d, c, e, b ; b, d, e, f, b ;

b, d, f, e, b ; b, e, d, f, b ; c, e, f, d, c ;

روشی ساده تر برای محاسبه تعداد دورهای به طول ۴ در گراف فوق این است که ابتدا توجه کنیم که چون درجه a برابر یک است، پس این رأس به هیچ دوری تعلق ندارد. سپس ۵ رأس باقی مانده تشکیل گرافی کامل از مرتبه ۵ می دهند که یک یال از آن (cf) حذف شده است. تعداد دورهای به طول ۴ در گراف

کامل مرتبه ۵ برابر $\binom{5}{4} \times 3 = 15$ است (زیرا ۴ رأس دوبه دو مجاور سه دور به

طول ۴ می دهند). یال cf از گراف کامل مرتبه ۵ به دور به طول ۴ تعلق دارد،

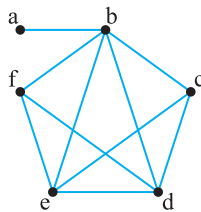
زیرا برای دو رأس دیگر این دور $\binom{3}{2} \times 2 = 6$ انتخاب وجود دارد. در حقیقت،

اگر برای مثال دو رأس b و d را انتخاب کنیم، آن گاه دورهای به طول ۴ شامل یال cf به صورت زیر هستند:

c, f, b, d, c

c, f, d, b, c

بنابراین پس از حذف یال cf تعداد دورهای به طول ۴ برابر $9 - 6 = 15$ می شود.



۲۷- گزینه ۳ فرض کنید A یک مجموعه احاطه گر مینیمال از گراف

زیر باشد. چون A باید هر یک از رؤس a, g و p را احاطه کند، بنابراین A باید با هر یک از مجموعه های $\{a, b, c, d\}$ ، $\{e, f, g, h\}$ و $\{m, n, p, q\}$ عضو مشترک داشته باشد (زیرا مثلاً a, b, c و d تنها رأس هایی هستند که a را احاطه می کنند). اگر $a \in A$ ، به تنهایی چهار رأس a, b, c و d را احاطه می کند، بنابراین به علت مینیمال بودن A، رأس های b, c و d دیگر نباید به A تعلق داشته باشند. به طور مشابه اگر $d \in A$ ، آن گاه $a, b, c \notin A$. در ضمن اگر $b \in A$ ، با توجه به اینکه a و d نباید عضو A باشند و A باید c را احاطه کند، پس $c \in A$ و به طور مشابه اگر $c \in A$ ، آن گاه $b \in A$. در نتیجه A از بین ۴ رأس a, b, c و d دقیقاً یکی از سه دسته زیر را دارد:

a d b, c

با استدلال مشابه نتیجه می گیریم A یکی از سه دسته زیر را نیز دارد:

e g f, h

و دقیقاً یکی از سه دسته زیر را نیز دارد:

m p n, q

نتیجه می گیریم برای A، $3 \times 3 \times 3 = 27$ انتخاب وجود دارد. پس تعداد مجموعه های متمایز احاطه گر مینیمال گراف داده شده برابر ۲۷ است. توجه کنید که این مجموعه های احاطه گر مینیمال ۳ عضوی، ۴ عضوی، ۵ عضوی و ۶ عضوی هستند. به نظر منظور طراح سؤال این بوده که تعداد اعضای یک مجموعه احاطه گر مینیمال چند حالت مختلف می تواند داشته باشد که اگر منظور این باشد، پاسخ برابر ۴ است.

۲۲- گزینه ۱ طبق فرض $m = 29n + 17$ و $m \equiv 0$ ، در نتیجه

$$29n + 17 \equiv 0 \Rightarrow 29n \equiv -17 \Rightarrow 29n \equiv 2 \Rightarrow -n + 2 \equiv 0 \Rightarrow n \equiv 2$$

پس $n = 5k + 2$ ، در نتیجه

$$m = 29n + 17 = 29(5k + 2) + 17 = 145k + 75$$

چون m عددی سه رقمی است، پس

$$100 \leq 145k + 75 \leq 999 \Rightarrow 25 \leq 145k \leq 924 \Rightarrow 1 \leq k \leq 6$$

از طرف دیگر، باید $n > 17$ پس

$$5k + 2 > 17 \Rightarrow k > 3$$

بنابراین $k = 4, 5, 6$ و تعداد مقادیر قابل قبول برای m برابر ۳ است.

۲۳- گزینه ۴ می توان نوشت

$$(3n^2 - 2n + 6, 3n + 5) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 3n^2 - 2n + 6 \\ d | 3n + 5 \end{cases}$$

$$d | (3n^2 - 2n + 6) - n(3n + 5) = -7n + 6$$

$$\begin{cases} d | 3n + 5 \\ d | -7n + 6 \end{cases} \Rightarrow d | 7(3n + 5) + 3(-7n + 6) = 53$$

چون ۵۳ عددی اول است و $d \neq 1$ ، پس $d = 53$.

۲۴- گزینه ۳ تجزیه عدد ۱۰۵ به صورت $3 \times 5 \times 7$ است. بنابراین

$$105 | 2^n - 1 \Rightarrow 3 \times 5 \times 7 | 2^n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3 | 2^n - 1 \\ 5 | 2^n - 1 \\ 7 | 2^n - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2^n \equiv 1 \pmod{5} \\ 2^n \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

باقی مانده تقسیم توان های ۲ را بر اعداد ۳، ۵ و ۷ محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 1 \Rightarrow 2^{2k} \equiv 1 \\ 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 3, 2^4 \equiv 1 \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \\ 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1 \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 2^n \equiv 1 \\ 2^n \equiv 1 \pmod{5} \\ 2^n \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 | n \\ 4 | n \\ 3 | n \end{cases} \Rightarrow 12 | n \Rightarrow n = 12k$$

$$100 \leq 12k \leq 999 \Rightarrow 1 \leq k \leq 8$$

چون n دورقمی است، پس

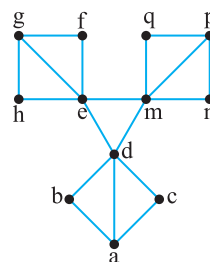
بنابراین ۸ مقدار قابل قبول برای n وجود دارد.

۲۵- گزینه ۱ با توجه به فرض می توان نوشت

$$m = (\overline{5aa}) \times 100 + \overline{aa} = (5(10a + a)) \times 100 + (10a + a)$$

$$= 500 \times 11a + 11a = 11a \times 501 = 11a \times 3 \times 167$$

$$= 1837 \times 3a \Rightarrow m \equiv 1837$$



۲۸- گزینه ۴ در گراف ۵ رأسی K - منتظم بیشترین مقدار ممکن K

برابر ۴ است که به ازای آن گراف کامل ۵ رأسی به دست می‌آید. می‌دانیم تعداد

دوره‌های به طول k در گراف کامل n رأسی برابر $\frac{(k-1)!}{2} \times \binom{n}{k}$ است، پس تعداد

دوره‌های به طول ۴ در گراف کامل ۵ رأسی برابر $5 \times 3 = 15$ است.