پاسخ کنکور ۹۹

۲۴۳۱- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس $P(1)=8$. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x+1$ برابر ۵ است، پس $P(-\frac{1}{2})=5$.

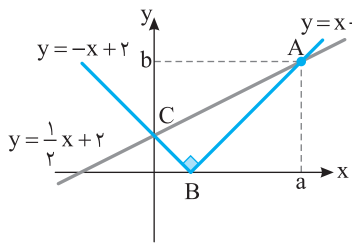
باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $ax+b$ است. بنابراین

$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+ax+b=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} P(1)=a+b=8 \\ P(-\frac{1}{2})=-\frac{a}{2}+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ برابر $2x+6$ است.

۲۴۳۲- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ و $g(x)=\frac{1}{2}x+2$ به‌صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مد نظر است.



$$x-2=\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow x=8 \Rightarrow a=8 \Rightarrow b=8-2=6$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(8,6)$، $B(2,0)$ و $C(0,2)$ هستند. پس

$$AB=\sqrt{(8-2)^2+(6-0)^2}=6\sqrt{2},\quad BC=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=12$$

۲۴۳۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(g^{-1}of^{-1})(20)=a$، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(20))=a \Rightarrow g(a)=f^{-1}(20) \Rightarrow f(g(a))=20$$

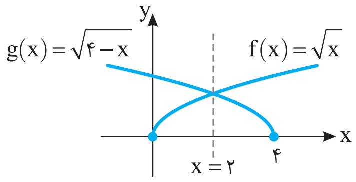
واضح است که $f(16)=20$، زیرا

$$f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20$$

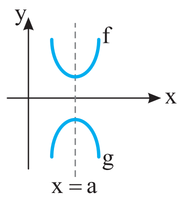
پس $f^{-1}(20)=16$. بنابراین

$$g(a)=16 \Rightarrow \frac{9a+6}{1-a}=16 \Rightarrow 9a+6=16-16a \Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

۲۴۳۴- گزینهٔ ۳ اگر قرینهٔ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-4)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به‌صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=2$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می‌شود:



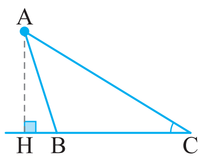
۲۴۳۵- گزینهٔ ۴ ابتدا $\cot\hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin\hat{C}$ به‌دست می‌آوریم:

$$1+\cot^2\hat{C}=\frac{1}{\sin^2\hat{C}} \Rightarrow 1+\cot^2\hat{C}=\frac{169}{25}$$

$$\cot^2\hat{C}=\frac{144}{25} \Rightarrow \cot\hat{C}=\frac{12}{5}$$

بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot\hat{C}=\frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{12}{5}=\frac{9}{AH} \Rightarrow AH=3/75$$



۲۴۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)=\cos(3\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})$$

$$=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

از طرف دیگر، $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$، پس

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{2}{100}=\frac{49}{50} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-7}{5\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع دوم قرار دارد و $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه

$$A=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{10}-\frac{7\sqrt{2}}{10})=\frac{3}{5}$$

۲۴۳۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan 3x \tan x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$$\tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = (2k+1)\frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

$$k=4 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{8}, \qquad k=5 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{8}$$

$$k=6 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{8}, \qquad k=7 \Rightarrow x = \frac{15\pi}{8}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ برابر 6π است. توجه کنید که به ازای هیچ‌یک از جواب‌ها، مقدار $\tan x$ برابر صفر نیست.

۲۴۳۸- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دستهٔ اول برابر است با:

$$1+2+\cdots+19 = \frac{19\times 20}{2} = 190$$

بنابراین عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با $\frac{20}{2}(191+210) = 4010$.

۲۴۳۹- گزینهٔ ۱ مقدار جرم باقی‌مانده در بازه‌های زمانی ۳۰ روزهٔ متوالی به‌صورت زیر است.

- در ابتدا $a=24$ گرم موجود است.
- پس از ۳۰ روز مقدار باقی‌مانده برابر است با $a - \frac{1}{10}a = \frac{9}{10}a$
- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$\frac{9}{10}a - \frac{1}{10}(\frac{9}{10}a) = \frac{81}{100}a = (\frac{9}{10})^2 a$$

- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر $(\frac{9}{10})^3 a$ خواهد بود.

بنابراین پس از n بازهٔ زمانی ۳۰ روزه مقدار باقی‌مانده از جرم برابر است با

$$(\frac{9}{10})^n a = 24(\frac{9}{10})^n$$

چون ۸ گرم از ماده قرار است باقی بماند، پس

$$24(\frac{9}{10})^n = 8 \Rightarrow (\frac{9}{10})^n = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{10}{9})^n = 3$$

$$n = \log_{\frac{10}{9}} 3 = \frac{1}{\log_3(\frac{10}{9})} = \frac{1}{\log_3 10 - \log_3 9} = \frac{1}{\frac{1}{\log 3} - 2} = \frac{1}{\frac{100}{48} - 2} = 12$$

پس برای باقی‌ماندن ۸ گرم از این عنصر ۱۲ تا ۳۰ روز طی می‌شود که برابر ۳۶۰ روز است.

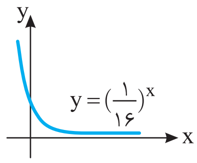
۲۴۴۰- گزینهٔ ۱ این سؤال مربوط به حد دنباله‌هاست که خارج از مباحث کتاب درسی است ولی تا حد امکان سعی می‌کنیم با کمک مطالب موجود در کتاب درسی به آن توضیح دهیم. ابتدا توجه کنید که

$$\frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3\times 2^{1-2n}} = \frac{2\times 2^{2n} - 2\times 2^{-2n}}{2\times 2^{2n} + 3\times 2\times 2^{-2n}} = \frac{2^{2n} - 2^{-2n}}{2^{2n} + 3\times 2^{-2n}}$$

$$= \frac{1 - 2^{-4n}}{1 + 3\times 2^{-4n}} = \frac{1 - (\frac{1}{16})^n}{1 + 3(\frac{1}{16})^n}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع $y = (\frac{1}{16})^x$ واضح است که $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{16})^x = 0$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - (\frac{1}{16})^n}{1 + 3(\frac{1}{16})^n} = \frac{1-0}{1-3\times 0} = 1$$



۲۴۴۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x+5) - 7\sqrt{x}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(2x+5)^2 - 49x}{4x^2 - (3x+1)} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + 7\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x^2 - 29x + 25}{4x^2 - 3x - 1} \times \lim_{x\to 1}\frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + 7\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)} \times \frac{2+2}{2+5+7} = \frac{4}{14}\lim_{x\to 1}\frac{4x-25}{4x+1} = \frac{2}{7}\times(-\frac{21}{5}) = -1/2$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \lim_{x\to 1}\frac{2 - \frac{7}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{2\times 2}} = -1/2$$

۲۴۴۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به‌صورت زیر است:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=0$ و $x=2$ پیوسته است، پس

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$b = \lim_{x\to 0^-}(x^2 + ax + b) = \lim_{x\to 0^+}((x-1)[x]) \Rightarrow b = 0$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$4 + 2a + b = \lim_{x\to 2^+}(x^2 + ax + b) = \lim_{x\to 2^-}((x-1)[x])$$

$$4 + 2a = (2-1)\times 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۲۴۴۳- گزینهٔ ۱ چون خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c} = -1 \Rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + bx + c}$. چون خطوط $x=1$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند، پس $x=1$ و $x=-2$ ریشه‌های چندجمله‌ای $2x^2 + bx + c$ هستند. پس

$$2x^2 + bx + c = 2(x-1)(x+2) = 2x^2 + 2x - 4 \Rightarrow b = 2, c = -4$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + 2x - 4} \Rightarrow f(-1) = \frac{-2-3}{2-2-4} = \frac{5}{4} = 1/25$$

۲۴۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\sqrt{۱+\tan^۲ x})\Rightarrow g'(x)=(\sqrt{۱+\tan^۲ x})'f'(\sqrt{۱+\tan^۲ x})$$

$$g'(x)=\frac{۲\tan x(۱+\tan^۲ x)}{۲\sqrt{۱+\tan^۲ x}}f'(\sqrt{۱+\tan^۲ x})$$

بنابراین

$$g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{۲\sqrt{۳}(۱+۳)}{۲\sqrt{۱+۳}}f'(\sqrt{۱+۳})\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}\,f'(۲)\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۴}$$

۲۴۴۵- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{۳-۴}{۱}=-۱$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x)=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

بنابراین

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=-۱\quad(*)\Rightarrow ۲۱-x^۲+۴x=(x-۲)^۲$$

$$۲۱-x^۲+۴x=x^۲+۴-۴x\Rightarrow ۲x^۲-۸x-۱۷=۰$$

$$x=۲+\frac{۵\sqrt{۲}}{۲},\quad x=۲-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

توجه کنید که طبق معادلهٔ $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۲۴۴۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}=۵\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(۴)=۵\times۲-\frac{۴}{۲}=۸$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}+\frac{۲}{x\sqrt{x}}\Rightarrow m=f'(۴)=\frac{۵}{۴}+\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۴,۸)$ با شیب $\frac{۳}{۲}$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۲$$

اگر قرار دهیم $x=۰$، عرض نقطهٔ تقاطع با محور y برابر ۲ به‌دست می‌آید.

۲۴۴۷- گزینهٔ ۴ چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۱=۰$ هستند، پس مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم است:

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{۳}{۲},\quad \tan\alpha\tan\beta=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-\frac{۳}{۲}}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=-۱$.

۲۴۴۸- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. پس $P(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین

$$P(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})^۴+a(\frac{۱}{۲})^۳+۲(\frac{۱}{۲})^۲-۳(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow a=۷$$

$$P(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر است با

$$P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)=-۱۰$$

۲۴۴۹- گزینهٔ ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ و $g(x)=x+۷$ از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید. پس

$$f(x)=g(x)\Rightarrow|x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

$$x\geq۲\Rightarrow x-۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=۸$$

$$-۱\leq x\leq۲\Rightarrow -x+۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=-۴\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$x\leq-۱\Rightarrow -x+۲-x-۱=x+۷\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین $A(۸,۱۵)$ و $B(-۲,۵)$ نقاط تقاطع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$AB=\sqrt{(۸+۲)^۲+(۱۵-۵)^۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

۲۴۵۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=a$، پس

$$f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=a\Rightarrow f(a)=g^{-۱}(-۹)\ ,\ a\geq۲$$

$$a^۲-۴a+۹=g^{-۱}(-۹)\Rightarrow g(a^۲-۴a+۹)=-۹\Rightarrow\frac{۳-(a^۲-۴a+۹)}{۲}=-۹$$

$$a^۲-۴a-۱۲=۰\Rightarrow(a-۶)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۶\ ,\ a=-۲\ \text{(غ.ق.ق)}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=x^۲-۴x+۹\Rightarrow y=(x-۲)^۲+۵\Rightarrow y-۵=(x-۲)^۲$$

$$|x-۲|=\sqrt{y-۵}\xrightarrow{x\geq۲}x-۲=\sqrt{y-۵}$$

$$x=۲+\sqrt{y-۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۵}$$

از طرف دیگر،

$$y=g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow۲y=۳-x\Rightarrow x=۳-۲y\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳-۲x$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=f^{-۱}(۳-۲(-۹))$$

$$f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۲۱-۵}=۶$$

۲۴۵۱- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم). ضابطهٔ این تابع به صورت $y=-f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f(-x)+۴$ رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow(x-۱)^۲=-(-x-۱)^۲+۴$$

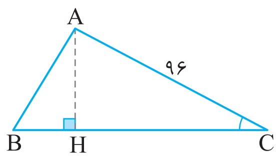
$$x^۲-۲x+۱=-x^۲-۲x-۱+۴\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

۲۴۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا از $۱+\cot^۲\hat{C}=\dfrac{۱}{\sin^۲\hat{C}}$ مقدار $\sin\hat{C}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲=\frac{۱}{\sin^۲\hat{C}}\Rightarrow\sin^۲\hat{C}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC:\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶}\Rightarrow AH=۶۴$$



۲۴۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل که در آن $\tan\alpha=\frac{1}{7}$، نتیجه می‌شود

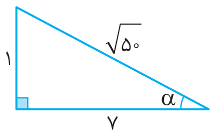
$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}},\quad \cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$$

بنابراین

$$\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)=\sin(3\pi+(\frac{\pi}{4}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{50}}+\frac{7}{\sqrt{50}})=-\frac{4}{5}$$



۲۴۵۴- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos 2x$$

$$(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos x)+(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3})=\cos 2x$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)+(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=\cos 2x$$

$$\cos x=\cos 2x$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\pm x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\ x=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هستند.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x=\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$ است.

۲۴۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل دستهٔ اول برابر است با $1+2+3+\dots+40=\frac{40}{2}(1+40)=820$

بنابراین آخرین عدد واقع در دستهٔ چهلم همان هشتصدوبیستمین عدد طبیعی فرد است که برابر است با $2\times820-1=1639$.

۲۴۵۶- گزینهٔ ۲ مقدار مادهٔ خالص در محلول در روزهای متوالی به صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ۱۰۰٪)

روز دوم: $100-4=96$ (غلظت ۹۶٪)

روز سوم: $96-\frac{96}{100}\times4=96(1-\frac{4}{100})$ (غلظت: ۹۲/۱۶٪)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$100,\ 100(1-\frac{4}{100}),\ 100(1-\frac{4}{100})^2,\dots$$

بنابراین در روز $(n+1)$ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار مادهٔ خالص برابر $100(1-\frac{4}{100})^n$ خواهد بود که باید $\frac{1}{3}$ مادهٔ خالص اولیه، یعنی $\frac{100}{3}$ لیتر باشد.

پس

$$100(1-\frac{4}{100})^n=\frac{1}{3}\times100\Rightarrow(\frac{24}{25})^n=\frac{1}{3}$$

$$n=\log_{\frac{24}{25}}(\frac{1}{3})=\frac{-\log 3}{\log\frac{24}{25}}=\frac{-\log 3}{\log 24-\log 25}$$

$$=\frac{-\log 3}{\log 8+\log 3-\log(\frac{100}{4})}=\frac{-\log 3}{3\log 2+\log 3-\log 100+\log 4}$$

$$=\frac{-\log 3}{5\log 2+\log 3-2}=\frac{-0.48}{5\times0.3+0.48-2}=24$$

۲۴۵۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to0^-$، آن‌گاه

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}=\frac{(\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x})}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{4x}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{4x}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{4}{-\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-2$$

۲۴۵۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-2,2]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیرصحیح بازهٔ $(-2,2)$، توابع $y=[x]$ و $y=\sin\pi x$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=0$، $x=1$ و $x=-1$) تابع $y=[x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y=\sin\pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود.

بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=2$ و $x=-2$ ناپیوسته است.

۲۴۵۹- گزینهٔ ۲ در دو حالت ممکن است تابع $f(x)=\frac{ax^2+7x}{2x^2+bx+c}$ فقط یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=2$ داشته باشد.

حالت اول $x=2$ ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مخرج $f(x)$ باشد، یعنی

$$2x^2+bx+c=2(x-2)^2=2x^2-8x+8\Rightarrow b=-8$$

$$c=8\Rightarrow f(x)=\frac{ax^2+7x}{2(x-2)^2}$$

چون $f(3)=6$، پس $\frac{9a+21}{2\times1}=6\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=\frac{-x^2+7x}{2(x-2)^2}$

پس معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y=-\frac{1}{2}$ است.

حالت دوم $x=2$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد و یکی از ریشه‌های صورت $f(x)$ ریشهٔ دیگر مخرج آن باشد. اگر $a\neq0$، آن‌گاه ریشه‌های صورت $f(x)$ اعداد $x=0$ و $x=-\frac{7}{a}$ هستند. بنابراین $f(x)$ باید به صورت‌های زیر باشد:

● اگر $x=۰$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x(ax+۷)}{۲x^۲+bx+c}=\frac{x(ax+۷)}{۲x(x-۲)}\Rightarrow c=۰\ ,\ b=-۴\Rightarrow f(x)=\frac{ax+۷}{۲(x-۲)}$$

چون $f(۳)=۶$، پس $\frac{۳a+۷}{۲\times۱}=۶\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{۵}{۳}x+۷}{۲x-۴}$

در این حالت معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y=\frac{۵}{۶}$ است.

● اگر $x=-\frac{۷}{a}$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x(ax+۷)}{۲x^۲+bx+c}=\frac{x(ax+۷)}{۲(x-۲)(ax+۷)}\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۱۰\ ,\ c=-۲۸$$

$$f(x)=\frac{x(x+۷)}{۲(x-۲)(x+۷)}=\frac{x}{۲(x-۲)}$$

در این حالت $f(۳)=\frac{۳}{۲}$ که مخالف فرض مسئله است.

اگر $a=۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{۷x}{۲x^۲+bx+c}$ که در این صورت باید داشته باشیم $c=۰$ و $b=-۴$، یعنی $f(x)=\frac{۷x}{۲x^۲-۴x}=\frac{۷}{۲(x-۲)}$ که باز هم شرط $f(۳)=۶$ برقرار نیست. پس خطوط $y=\frac{-۱}{۲}$ و $y=\frac{۵}{۳}$ می‌توانند مجانب افقی نمودار تابع f باشند.

۲۴۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})'f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

$$g'(x)=\frac{-\cos x(۱+\sin x)-\cos x(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)^۲}f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

$$=\frac{-۲\cos x}{(۱+\sin x)^۲}f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

بنابراین

$$g'(\frac{\pi}{۶})=\frac{-۲\cos\frac{\pi}{۶}}{(۱+\sin\frac{\pi}{۶})^۲}f'(\frac{۱-\sin\frac{\pi}{۶}}{۱+\sin\frac{\pi}{۶}})=\frac{-۴\sqrt{۳}}{۹}f'(\frac{۱}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$f'(\frac{۱}{۳})=-\frac{۳}{۴}$$

۲۴۶۱- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ در نقطهٔ مشترک $x=۴$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(۴)=g(۴)\Rightarrow ۸=۱۶+۴a+b\Rightarrow b=-۸-۴a\\ f'(۴)=g'(۴)\Rightarrow ۳=۸+a\Rightarrow a=-۵\Rightarrow b=۱۲\end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۳}{۲}\times۲=۳$$

$$g(x)=x^۲+ax+b\Rightarrow g'(x)=۲x+a\Rightarrow g'(۴)=۸+a$$

۲۴۶۲- گزینهٔ ۱ ابتدا $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰\le x<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۵$، تساوی $[\frac{x}{۴}]=۱$ برقرار است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x)=x^۲-۹x\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\Rightarrow f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

بنابراین $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$.

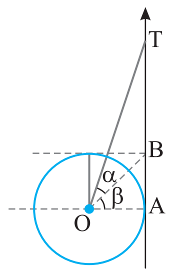
۲۴۶۳- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$OA=AB=۱\ ,\ BT=۲\Rightarrow\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\frac{AT}{OA}=\frac{۱+۲}{۱}=۳\\ \tan\beta=\frac{AB}{OA}=\frac{۱}{۱}=۱\end{cases}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow ۳=\frac{\tan\alpha+۱}{۱-\tan\alpha}$$

$$۳-۳\tan\alpha=\tan\alpha+۱\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$$



۲۴۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}=\frac{(۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})(۵+\sqrt{۶})}{(۵-\sqrt{۶})(۵+\sqrt{۶})}=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}+۱۵\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۲۵-۶}$$

$$=\frac{۱۹\sqrt{۲}+۱۹\sqrt{۳}}{۱۹}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر،

$$۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱}=\sqrt{۳}+۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-(\sqrt{۳}+۱)=\sqrt{۲}-۱$$

۲۴۶۵- گزینهٔ ۳ اعداد مربع کامل به‌صورت زیر هستند:

$$۱^۲,۲^۲,۳^۲,\ldots,۸^۲,۹^۲,\ldots$$

بنابراین آخرین عدد دستهٔ هشتم عدد $۸^۲$ و آخرین عدد دستهٔ نهم عدد $۹^۲$ است. همچنین اولین عدد دستهٔ نهم $۸^۲+۱$ است. پس واسطهٔ حسابی بین $۸^۲+۱$ و $۹^۲$ را باید حساب کنیم که برابر است با $\frac{۸^۲+۱+۹^۲}{۲}=۷۳$

۲۴۶۶- گزینهٔ ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است، پس بر $x-۱$ و $x+۱$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $p(-۱)=p(۱)=۰$. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ برابر $Q(۲)$ است. بنابراین

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)\Rightarrow Q(۲)=p(۱)+p(-۱)=۰$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$» که معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۲۴۶۷- گزینهٔ ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها در معادلهٔ $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ به‌ترتیب برابر $\frac{۱-۲m}{۳}$ و $\frac{۲-m}{۳}$ هستند، پس

$$\frac{۱-۲m}{۳}=\frac{۳}{۲-m}\Rightarrow(۱-۲m)(۲-m)=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$(m+۱)(۲m-۷)=۰\Rightarrow m=-۱\,,\,m=\frac{۷}{۲}$$

به‌ازای $m=-۱$ معادله به‌صورت $۳x^۲-۳x+۳=۰$ در می‌آید که جواب ندارد، پس فقط $m=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۲۴۶۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳\Rightarrow -۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}-۲<۱\Rightarrow -۱<\frac{-۳x+۳}{۲x-۱}<۱$$

$$\left|\frac{-۳x+۳}{۲x-۱}\right|<۱\Rightarrow|۳x-۳|<|۲x-۱|$$

بنابراین نامعادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$(۳x-۳)^۲<(۲x-۱)^۲\Rightarrow(۳x-۳)^۲-(۲x-۱)^۲<۰$$

$$(۳x-۳+۲x-۱)(۳x-۳-۲x+۱)<۰$$

$$(۵x-۴)(x-۲)<۰\Rightarrow\frac{۴}{۵}<x<۲\Rightarrow x\in(۰/۸,۲)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $۱<\frac{۱+۱}{۲-۱}<۳$

همچنین عدد $\frac{۳}{۲}$ در نامعادله صدق می‌کند $۱<\frac{\frac{۳}{۲}+۱}{۲(\frac{۳}{۲})-۱}<۳\Leftrightarrow ۱<\frac{۵}{۴}<۳$

این اعداد فقط عضو بازهٔ گزینهٔ (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳\Rightarrow\frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱}<۰\Rightarrow\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}<۰\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۴}{۵},+\infty)$$

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}>۱\Rightarrow\frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱}>۰\Rightarrow\frac{-x+۲}{۲x-۱}>۰\Rightarrow x\in(\frac{۱}{۲},۲)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$x\in(\frac{۴}{۵},۲)=(۰/۸,۲)$$

۲۴۶۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مختصات نقاط را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}x=۰\\y=۵\end{cases}\Rightarrow ۰+۰+c=۵\Rightarrow c=۵\,,\quad\begin{cases}x=۱\\y=۱۱\end{cases}\Rightarrow a+b+c=۱۱\Rightarrow a+b=۶$$

$$\begin{cases}x=-۲\\y=۵\end{cases}\Rightarrow ۴a-۲b+c=۵\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow b=۲a$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۶\\b=۲a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۴$. پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ از نقاط $(۰,۵)$، $(-۲,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c-۵$ از نقاط $(۰,۰)$، $(-۲,۰)$ و $(۱,۶)$ می‌گذرد و معادلهٔ سهمی‌ای که از این نقاط می‌گذرد به صورت $y=a(x-۰)(x+۲)=a(x^۲+۲x)$ است. این سهمی از نقطهٔ $(۱,۶)$ می‌گذرد. پس $۶=a(۱+۲)\Rightarrow a=۲$

بنابراین معادلهٔ سهمی اولیه به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ یکسان است، پس طول رأس این سهمی برابر -۱ است. بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل کلی $y=m(x+۱)^۲+n$ است. این سهمی از نقاط $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد. پس

$$(۰,۵)\in\text{سهمی}\Rightarrow m+n=۵$$

$$(۱,۱۱)\in\text{سهمی}\Rightarrow ۴m+n=۱۱$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}m+n=۵\\۴m+n=۱۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $m=۲$ و $n=۲$.

در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=۲(x+۱)^۲+۳$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

۲۴۷۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست ببریم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}+۲$ حاصل می‌شود. نقطهٔ برخورد نمودار توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$ مد نظر است که طول آن از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x}-۲=\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=x-۱۲$$

$$۱۶=۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴=\sqrt{x}\Rightarrow x=۱۶$$

پس نقطهٔ مورد نظر $A(۱۶,۴)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۱۷}$$

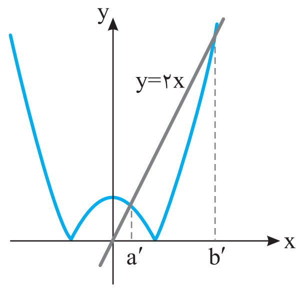
توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۴۷۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $f(x)=|۲x^۲-۴|=۲|x^۲-۲|$ و $g(x)=۲x$ به‌صورت زیر است. واضح است که در بازهٔ (a',b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند:

$$۲|x^۲-۲|=۲x\Rightarrow|x^۲-۲|=x$$

$$x\geq۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲=x\\x^۲-۲=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲\,,\,x=-۱\,(\text{غ.ق.ق})\\x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۲\,(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a=a'=۱$ و $b=b'=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$.



توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات و نامعادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۴۷۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f = D_g = \mathbb{R}$، بنابراین $D_{gof} = \mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f^{۲}(x)+۴f(x)=۴-(f(x)-۲)^{۲}$$
$$=۴-(۲x-[۲x]-۲)^{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱ \Rightarrow -۲\le ۲x-[۲x]-۲<-۱$$
$$۱<(۲x-[۲x]-۲)^{۲}\le ۴ \Rightarrow -۴\le -(۲x-[۲x]-۲)^{۲}<-۱$$
$$۰\le ۴-(۲x-[۲x]-۲)^{۲}<۳ \Rightarrow ۰\le (gof)(x)<۳$$

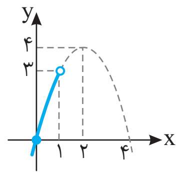
بنابراین برد تابع gof بازهٔ $[۰,۳)$ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\Rightarrow ۰\le f(x)<۱$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=g(t)=-t^{۲}+۴t,\quad ۰\le t<۱$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $۰\le g(t)<۳$، یعنی

$$R_{gof}=[۰,۳)$$



۲۴۷۳- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=f^{-۱}(x)$، پس

$$g(۶)+g(۱۲)=f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=x+\sqrt{x}$. $f(۴)=۴+۲=۶$ و $f(۹)=۹+۳=۱۲$.
بنابراین $f^{-۱}(۶)=۴$ و $f^{-۱}(۱۲)=۹$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۲۴۷۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(a\,,-a)$ که $a>۰$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع کند. در این صورت $f^{-۱}(a)=-a$ و در نتیجه $f(-a)=a$. بنابراین

$$-a-\frac{۲}{-a}=a\Rightarrow ۲a=\frac{۲}{a}\Rightarrow a^{۲}=۱\Rightarrow a=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۲}{x},\quad x<۰\Rightarrow y=\frac{x^{۲}-۲}{x}\Rightarrow xy=x^{۲}-۲\Rightarrow x^{۲}-yx-۲=۰$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{y+\sqrt{y^{۲}+۸}}{۲}>۰ \quad (\text{غ.ق.ق}) \\ x=\dfrac{y-\sqrt{y^{۲}+۸}}{۲} \end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^{۲}+۸}}{۲}$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\sqrt{x^{۲}+۸}}{۲}=-x\Rightarrow \sqrt{x^{۲}+۸}=۳x\quad (x>۰)$$
$$x^{۲}+۸=۹x^{۲}\Rightarrow x^{۲}=۱\Rightarrow x=۱,\ x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

۲۴۷۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_{۴} ۳=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲} ۳=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \log_{۲} ۳=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\frac{\log_{۲} ۶}{\log_{۲} ۱۲}=\frac{\log_{۲} ۳+\log_{۲} ۲}{\log_{۲} ۳+۲\log_{۲} ۲}=\frac{\frac{۸}{۵}+۱}{\frac{۸}{۵}+۲}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_{۴} ۳=۰/۸=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۴^{\frac{۴}{۵}}=۳\Rightarrow ۴^{۴}=۳^{۵}\Rightarrow ۲^{۸}=۳^{۵}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.) بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\log_{۱۲}۳+\log_{۱۲}۲=\log_{۲^{۲}\times ۳}۳+\log_{۲^{۲}\times ۳}۲$$
$$=۴\log_{(۲^{۸}\times ۳^{۴})}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times ۳^{۵})}۲=۴\log_{(۳^{۵}\times ۳^{۴})}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times ۲^{۸})}۲$$
$$=۴\log_{۳^{۹}}۳+۵\log_{۲^{۱۸}}۲=\frac{۴}{۹}\log_{۳} ۳+\frac{۵}{۱۸}\log_{۲} ۲=\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

۲۴۷۶- گزینهٔ ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{۱}{۳})=۰$ و $f(۰)=-۲$. بنابراین

$$f(x)=-۴+۲^{ax+b}\Rightarrow \begin{cases} f(۰)=-۴+۲^{b}=-۲\\ f(-\frac{۱}{۳})=-۴+۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲^{b}=۲\Rightarrow b=۱\\ ۲^{-\frac{a}{۳}+۱}=۴\Rightarrow -\frac{a}{۳}+۱=۲\Rightarrow a=-۳\end{cases}$$

پس

$$f(x)=-۴+۲^{-۳x+۱}\Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^{۶}=۶۰$$

۲۴۷۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $f^{-۱}(۲)=a>۰$. در این صورت $f(a)=۲$ و در نتیجه

$$\frac{۲^{a}+(\frac{۱}{۲})^{a}}{۲}=۲\Rightarrow ۲^{a}+\frac{۱}{۲^{a}}=۴$$

با فرض $b=۲^{a}>۰$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b+\frac{۱}{b}=۴\Rightarrow b^{۲}-۴b+۱=۰\Rightarrow b=۲+\sqrt{۳},\ b=۲-\sqrt{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

(اگر $b=۲-\sqrt{۳}$، آن‌گاه $a=\log_{۲}(۲-\sqrt{۳})<۰$ که با توجه به دامنهٔ داده شده قابل قبول نیست.) پس $۲^{a}=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow a=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$

راه‌حل دوم تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$ با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}\Rightarrow ۲y=۲^{x}+\frac{۱}{۲^{x}}$$

اگر فرض کنیم $t=۲^{x}>۰$، آن‌گاه

$$۲y=t+\frac{۱}{t}\Rightarrow t^{۲}-۲yt+۱=۰\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}\Rightarrow ۲^{x}=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}$$

چون $x\ge ۰$، پس فقط $y+\sqrt{y^{۲}-۱}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x=\log_{۲}(y+\sqrt{y^{۲}-۱})\Rightarrow f^{-۱}(x)=\log_{۲}(x+\sqrt{x^{۲}-۱})$$

در نتیجه $f^{-۱}(۲)=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$.

۲۴۷۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan ۳۰۰^\circ=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۸۰^\circ=\tan(۴۵۰^\circ+۳۰^\circ)=\tan(۵\times۹۰^\circ+۳۰^\circ)=-\cot ۳۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰^\circ=\sin(۸۱۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin(۹\times۹۰^\circ+۳۰^\circ)=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan ۳۰۰^\circ\cos ۲۱۰^\circ+\tan ۴۸۰^\circ\sin ۸۴۰^\circ$$

$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

۲۴۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=a+b\cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a+|b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{۷\pi}{۳},۰)$ عبور می‌کند. پس

$$a+b\cos\frac{۷\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+b\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰$$

$$a+\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow a=-\frac{b}{۲}$$

بنابراین $a+|b|=۳\Rightarrow -\frac{b}{۲}+|b|=۳$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{۲}-b=۳\Rightarrow b=-۲$$

۲۴۸۰- گزینهٔ ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به‌ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ است که روی شکل برابر ۱ و ۳- نشان داده شده است. پس

$$\begin{cases}|a|+c=۱\\ -|a|+c=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-۱\\ |a|=۲\end{cases}$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر $\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=۶\pi$ نشان داده شده است. پس $\frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۳}$

پس $|\frac{a}{b}|=\frac{۲}{\frac{۱}{۳}}=۶\Rightarrow\frac{a}{b}=\pm۶$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند، پس $\frac{a}{b}=-۶$.

۲۴۸۱- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ x=(۲k+۱)\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

چون شرط $x\neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x=(۲k+۱)\pi$ قابل قبول نیست.

۲۴۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-۲$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=-۳$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{-۳+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^-}۰=۰$$

۲۴۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{۴x^n}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\\ a=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

بنابراین **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}\frac{۲x-۳\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{x-۳}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}(\frac{۸x^۳-۲۷(x^۲-۱)}{x-۳}\times\frac{۱}{۴x^۲+۶x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+۹\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}})$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(۸x^۲-۳x-۹)}{x-۳}$$

$$\times\lim_{x\to۳}\frac{۱}{۴x^۲+۶x\sqrt[۳]{x^۲-۱}+۹\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\lim_{x\to۳}(۸x^۲-۳x-۹)\times\frac{۱}{۳۶+۳۶+۳۶}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\times(۷۲-۹-۹)\times\frac{۱}{۳۶\times۳}=\frac{۱}{۲۴}$$

راه‌حل دوم به کمک قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲\times۳}{۳\times۴}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حد تابع رادیکالی در بی‌نهایت در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۴۸۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-۲)=f'_+(-۲),\quad f(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & x\le-۲\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & x>-۲\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{\sqrt{۵-۲x}} & x\le-۲\\ -x+b & x>-۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(-۲)=-\frac{۱}{\sqrt{۵+۴}}=-\frac{۱}{۳}\\ f'_+(-۲)=-(-۲)+b=b+۲\end{cases}\Rightarrow b+۲=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=-\frac{۷}{۳}$$

$$\begin{cases}f(-۲)=\sqrt{۵+۴}=۳\\ \lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}(-\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c)=-۲-۲b+c=c+\frac{۸}{۳}\end{cases}$$

$$c+\frac{۸}{۳}=۳\Rightarrow c=\frac{۱}{۳}$$

۲۴۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳=\frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳}=\frac{x(x+۲)}{x^۳(x-۱)^۳}=\frac{x+۲}{x^۲(x-۱)^۳}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{x^۲(x-۱)^۳-(۲x(x-۱)^۳+۳(x-۱)^۲x^۲)(x+۲)}{(x^۲(x-۱)^۳)^۲}$$

در نتیجه

$$f'(۲)=\frac{۴\times۱^۳-(۴(۱)^۳+۳(۱)^۲\times۴)(۴)}{(۴(۱)^۳)^۲}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۲۴۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}=\frac{\sqrt{۴x-x^۲}+۲-x}{\sqrt{۴x-x^۲}}$$

واضح است که $x=۰$ و $x=۴$ نقاط بحرانی تابع‌اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به‌دست آید:

$$\sqrt{۴x-x^۲}+۲-x=۰\Rightarrow\sqrt{۴x-x^۲}=x-۲,\quad x>۲$$

$$۴x-x^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow ۲x^۲-۸x+۴=۰$$

$$x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۲}\,,\,x=۲-\sqrt{۲}$$ (غ.ق.ق)

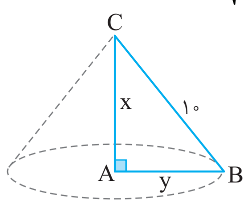
بنابراین نقطهٔ $A(۲+\sqrt{۲}\,,\,۲+۲\sqrt{۲})$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است که فاصلهٔ آن از نیمساز ناحیهٔ اول برابر است با

$$\frac{|۲+۲\sqrt{۲}-(۲+\sqrt{۲})|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۱$$

۲۴۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^۲+y^۲=۱۰$. پس $y^۲=۱۰-x^۲$.
اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V=\frac{\pi}{۳}y^۲x$ خواهد بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x)=\frac{\pi}{۳}x(۱۰-x^۲)$ حاصل شود.

$$V(x)=\frac{\pi}{۳}(۱۰x-x^۳)\Rightarrow V'(x)=\frac{\pi}{۳}(۱۰-۳x^۲)$$

$$V'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}\Rightarrow y^۲=۱۰-\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow y=\sqrt{۲}\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}$$



بنابراین

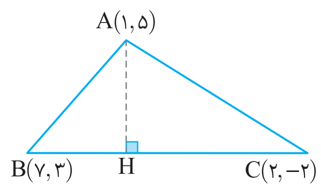
$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}}{\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}$$

۲۴۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{۳-(-۲)}{۷-۲}=۱$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-۳=۱\times(x-۷)$$

پس معادلهٔ خط BC به‌صورت $x-y-۴=۰$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC است که برابر است با $\frac{|۱-۵-۴|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$.



۲۴۸۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$

$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱$$

همچنین

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$$

۲۴۹۰- گزینهٔ ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب a، $a+۴d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس

$$a(a+۱۳d)=(a+۴d)^۲\Rightarrow a^۲+۱۳ad=a^۲+۸ad+۱۶d^۲$$

$$۵ad=۱۶d^۲\Rightarrow a=\frac{۱۶}{۵}d$$

(توجه کنید که $d\neq۰$. چون در غیر این صورت، $q=۱$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.)

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$r=\frac{a+۴d}{a}=\frac{\frac{۱۶}{۵}d+۴d}{\frac{۱۶}{۵}d}=\frac{۳۶d}{۱۶d}=\frac{۹}{۴}$$

۲۴۹۱- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(۴)=۳$ و $p(-۲)=۱$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)=p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$ برابر $A(۲)$ است و برابر است با $A(۲)=p(۴)+۴p(-۲)=۳+۴\times۱=۷$

۲۴۹۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس شرایط $\Delta>۰$، $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$ برقرار هستند. در اینجا $a=۲$، $b=m$ و $c=m+۶$. پس

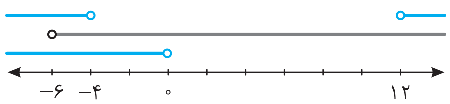
$$\Delta=b^۲-۴ac=m^۲-۴\times۲(m+۶)>۰\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸>۰$$

$$(m-۱۲)(m+۴)>۰\Rightarrow m>۱۲ \text{ یا } m<-۴ \qquad (۱)$$

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow\frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶ \qquad (۲)$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰ \qquad (۳)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m\in(-۶,-۴)$ است.



راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-۵$ معادله به صورت $۲x^۲-۵x+۱=۰$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta=۱۷>۰$، $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}>۰$ و $-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۲}>۰$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-۱$ معادله به صورت $۲x^۲-x+۵=۰$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta=-۳۹<۰$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست و گزینهٔ (۴) جواب است.

۲۴۹۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-1-3x-3}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+4}{x+1}>0$$

$$x\in(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty)\qquad(1)$$

$$\frac{2x-1}{x+1}>-1\Rightarrow\frac{2x-1+x+1}{x+1}>0\Rightarrow\frac{3x}{x+1}>0$$

$$x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)\qquad(2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-[-4,0]$$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1<\frac{2x-1}{x+1}<3\Rightarrow-2<\frac{2x-1}{x+1}-1<2\Rightarrow-2<\frac{x-2}{x+1}<2$$

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|<2\Rightarrow|x-2|<2|x+1|\Rightarrow x^2-4x+4<4x^2+8x+4$$

$$x^2+4x>0\Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۲۴۹۴- گزینهٔ ۲ چون رأس سهمی نقطهٔ $(-1,9)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+1)^2+9$ است. این سهمی از نقطهٔ $(3,1)$ می‌گذرد، پس

$$1=a(3+1)^2+9\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ است که از نقطهٔ $(5,-9)$ می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(5+1)^2+9=-18+9=-9$$

۲۴۹۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^2-2x,(x>1)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x+16$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2-2x=-x^2+2x+16\Rightarrow x^2-2x-8=0$$

$$(x-4)(x+2)=0\Rightarrow x=4,\ x=-2\quad(\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$$

۲۴۹۶- گزینهٔ ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-1)^2>4x^4$ باشد، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ قرار دارد:

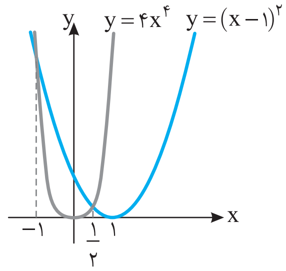
$$4x^4<(x-1)^2\Rightarrow(2x^2)^2-(x-1)^2<0$$

$$(2x^2+x-1)(2x^2-x+1)<0$$

عبارت $2x^2-x+1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=1-8<0$. بنابراین باید نامعادلهٔ $2x^2+x-1<0$ را حل کنیم:

$$(x+1)(2x-1)<0\Rightarrow-1<x<\frac{1}{2}$$

در بازهٔ $(-1,\frac{1}{2})$ چنین اتفاقی می‌افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$ است. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-1)^2$ و $y=4x^4$ به صورت زیر است:

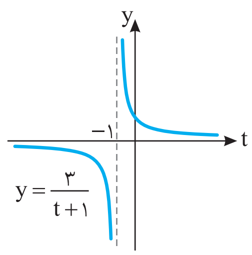


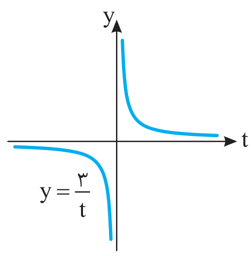
۲۴۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

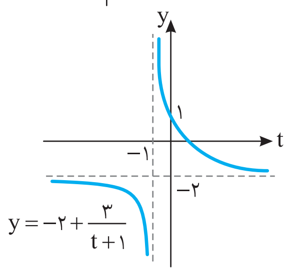
$$0\le x-[x]<1\Rightarrow-1<[x]-x\le0\Rightarrow-1<f(x)\le0$$

بنابراین تابع gof با تابع $y=\frac{1-2t}{t+1}$ که دامنهٔ آن بازهٔ $(-1,0]$ است، برابر است. برد این تابع را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود: $y=\frac{1-2t}{t+1}=-2+\frac{3}{t+1}$







واضح است که برد تابع gof بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به‌دست می‌آوریم: $y=-2+\frac{3}{t+1}$

$$-1<t\le0\Rightarrow0<t+1\le1\Rightarrow\frac{1}{t+1}\ge1\Rightarrow\frac{3}{t+1}\ge3\Rightarrow-2+\frac{3}{t+1}\ge1\Rightarrow y\ge1$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[1,+\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y\ge1$ مقداری مانند t وجود دارد که $y=-2+\frac{3}{t+1}$. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y+2=\frac{3}{t+1}\Rightarrow t+1=\frac{3}{y+2}\Rightarrow t=-1+\frac{3}{y+2}$$

راه‌حل سوم تابع $g(t)=\frac{1-2t}{t+1}$ روی بازهٔ $(-1,0]$ پیوسته و نزولی است. بنابراین برد آن برابر است با

$$[g(0),\lim_{t\to(-1)^+}g(t))=[1,+\infty)$$

۲۴۹۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=(\sqrt{x}+1)^2-1\Rightarrow(\sqrt{x}+1)^2=y+1 \quad (y\ge -1)$$

$$\sqrt{x}+1=\sqrt{y+1}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y+1}-1$$

$$x=(\sqrt{y+1}-1)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}-1)^2$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}-1)^2 \quad (x\ge -1)$$

$$g(3)+g(15)=f^{-1}(3)+f^{-1}(15)=1+9=10$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=x+2\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases} f(1)=3\Rightarrow f^{-1}(3)=1\\ f(9)=15\Rightarrow f^{-1}(15)=9\end{cases}$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow g(3)+g(15)=f^{-1}(3)+f^{-1}(15)=1+9=10$$

۲۴۹۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{1}{2x},\quad x>0$$

$$y=\frac{2x^2-1}{2x}\Rightarrow 2xy=2x^2-1\Rightarrow 2x^2-2yx-1=0$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{2y+\sqrt{4y^2+8}}{4}\\ x=\dfrac{2y-\sqrt{4y^2+8}}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^2+2}}{2}\\ x=\dfrac{y-\sqrt{y^2+2}}{2}<0 \ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{2}$$

طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-1}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{2}=-x\Rightarrow\sqrt{x^2+2}=-3x \quad (x<0)$$

$$x^2+2=9x^2\Rightarrow x^2=\frac14\Rightarrow x=\frac12 \ (\text{غ.ق.ق}),\ x=-\frac12$$

راه‌حل دوم فرض کنید نقطهٔ $(a,-a)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f^{-1} با خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم) باشد $(a<0)$. بنابراین

$$f^{-1}(a)=-a\Rightarrow f(-a)=a\Rightarrow -a-\frac{1}{-2a}=a$$

$$2a=\frac{1}{2a}\Rightarrow 4a^2=1\Rightarrow a=-\frac12$$

۲۵۰۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $\log_3 2=\frac58$، پس $\log_2 3=\frac85$. بنابراین

$$\log_{18}8=\frac{\log_2 8}{\log_2 18}=\frac{3\log_2 2}{\log_2 9+\log_2 2}=\frac{3}{2\log_2 3+1}=\frac{3}{2\times\frac85+1}=\frac57$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_3 2=\frac58\Rightarrow 3^{\frac58}=2\Rightarrow 3^5=2^8\Rightarrow 3^{10}=2^{16}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{18}8=\log_{3^2\times2}2^3=3\log_{3^2\times2}2=3\times5\log_{3^{10}\times2^5}2$$

$$=15\log_{2^{16}\times2^5}2=15\log_{2^{21}}2=\frac{15}{21}\log_2 2=\frac57$$

۲۵۰۱- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0)=-6$ و $f(\frac12)=0$. بنابراین

$$f(x)=-9+(\frac13)^{ax+b}$$

$$\begin{cases}f(0)=-9+(\frac13)^b=-6\\ f(\frac12)=-9+(\frac13)^{\frac12 a+b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{-b}=3\Rightarrow b=-1\\ 3^{-\frac a2+1}=9\Rightarrow-\frac a2+1=2\Rightarrow a=-2\end{cases}$$

پس

$$f(x)=-9+(\frac13)^{-2x-1}\Rightarrow f(2)=-9+(\frac13)^{-5}=234$$

۲۵۰۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع وارون تابع $f(x)=\dfrac{2^x-(\frac12)^x}{2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2^x-(\frac12)^x}{2}\Rightarrow 2y=2^x-\frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t=2^x>0$، آن‌گاه

$$2y=t-\frac1t\Rightarrow t^2-2yt-1=0\Rightarrow\begin{cases}t=y+\sqrt{y^2+1}\\ t=y-\sqrt{y^2+1}<0 \ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

$$2^x=y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\log_2(y+\sqrt{y^2+1})$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})\Rightarrow f^{-1}(2)=\log_2(2+\sqrt5)$$

راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2)=a$. پس $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a-(\frac12)^a}{2}=2\Rightarrow 2^a-\frac{1}{2^a}=4\Rightarrow(2^a)^2-4\times2^a-1=0$$

اگر فرض کنیم $2^a=b>0$، آن‌گاه

$$b^2-4b-1=0\Rightarrow b=2+\sqrt5,\ b=2-\sqrt5<0 \ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین

$$2^a=2+\sqrt5\Rightarrow a=\log_2(2+\sqrt5)$$

۲۵۰۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan ۲۸۵^\circ=\tan(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)=-\cot ۱۵^\circ$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ)=\tan(-۱۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\tan ۱۵^\circ$$

$$\sin ۱۰۹۵^\circ=\sin(۱۰۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\sin(۶\times ۱۸۰^\circ+۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ$$

$$\cos ۲۵۵^\circ=\cos(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

بنابراین

$$\tan ۲۸۵^\circ \tan(-۱۶۵^\circ)-\sin ۱۰۹۵^\circ \cos ۲۵۵^\circ$$
$$=(-\cot ۱۵^\circ)(\tan ۱۵^\circ)-(\sin ۱۵^\circ)(-\sin ۱۵^\circ)$$
$$=-۱+\sin^۲ ۱۵^\circ=-\cos^۲ ۱۵^\circ$$

۲۵۰۴- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۲},۰)$ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر $\frac{۳}{۲}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{۲})=۰\Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۰$$

$$a=-\frac{b}{۲}\Rightarrow a+|b|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{b}{۲}+|b|=\frac{۳}{۲}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{۲}-b=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۲۵۰۵- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -۳ است، پس $-|a|+c=-۳$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۶},۱)$ عبور می‌کند، پس $۱=a\sin(\frac{b\pi}{۶})+c$. همچنین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. پس $\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}$ و در نتیجه $|b|=۳$. با توجه به نمودار معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b=۳$ و در نتیجه

$$\begin{cases}-a+c=-۳\\ a\sin\frac{\pi}{۲}+c=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=-۳\\ a+c=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ c=-۱\end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b=-۳$ و در نتیجه

$$\begin{cases}a+c=-۳\\ a\sin(\frac{-\pi}{۲})+c=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=-۳\\ -a+c=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ c=-۱\end{cases}$$

۲۵۰۶- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۴\sin ۳x\cos ۳x=۱\Rightarrow ۲\sin ۶x=۱\Rightarrow \sin ۶x=\sin\frac{\pi}{۶}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶}\\ x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲})$ به‌ازای $k=۰$ و $k=۱$ حاصل می‌شوند:

$$x=\frac{\pi}{۳۶},\ x=\frac{۵\pi}{۳۶},\ x=\frac{۱۳\pi}{۳۶},\ x=\frac{۱۷\pi}{۳۶}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ چهار جواب دارد.

۲۵۰۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه

$$\frac{۲\sin^۲ x-\sin x-۱}{\cos^۲ x}=\frac{(\sin x-۱)(۲\sin x+۱)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}=\frac{-۲-۱}{۱+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۲۵۰۸- گزینهٔ ۲ چون حد تابع f در بی‌نهایت برابر ۲ شده است، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت کسر $f(x)$ با درجهٔ چندجمله‌ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=۰$ و $n=۲$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۲-۶x^۲+۱}{۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{-۲x^۲}{۷x^۲}=-\frac{۲}{۷}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=۳$ و $a\neq ۰$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳}{ax^۳}=\frac{۴}{a}=۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{(۲x-۱)(۲x^۲-۲x-۱)}{(۲x-۱)(x^۲+۴x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-۲x-۱}{x^۲+۴x+۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱۷}{۴}}=-\frac{۶}{۱۷}$$

۲۵۰۹- گزینهٔ ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(۲,m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطهٔ مانند A می‌توان پیدا کرد و بی‌شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$ از نقطهٔ $(۲,m)$ بگذرند و یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۴=۴a+۲b\Rightarrow ۴a=۴-۲b$$

$$f'(۲)=g'(۲)\Rightarrow -۳=۴a+b\Rightarrow ۴a=-۳-b$$

بنابراین

$$۴-۲b=-۳-b\Rightarrow b=۷$$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$g(x)=ax^۲+bx\Rightarrow g'(x)=۲ax+b$$

۲۵۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})'}{۳\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

از طرف دیگر،

$$y=\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\Rightarrow y'=\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲((۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲))}{۳(۳x+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

$$f'(-۲)=\frac{۲((۲+۴)(-۶+۵)-۳(-۴-۴))}{۳(-۶+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{-۴-۴}{-۶+۵}}}=۶$$

۲۵۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$=\frac{-۲(x^۲-۴x-۱)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۵},\ x=۲-\sqrt{۵}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
			min		max		

بنابرایـن $x=۲+\sqrt{۵}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسـبی تابع f اسـت. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۲(۲+\sqrt{۵})-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۱}$$

$$=\frac{۶\sqrt{۵}+۱۰}{۴\sqrt{۵}+۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}+۵}{۲\sqrt{۵}+۵}\times\frac{۲\sqrt{۵}-۵}{۲\sqrt{۵}-۵}$$

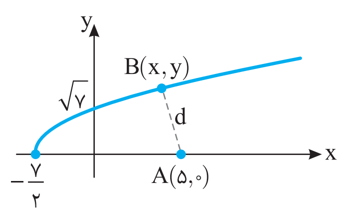
$$=\frac{۳۰-۱۵\sqrt{۵}+۱۰\sqrt{۵}-۲۵}{۲۰-۲۵}=\frac{۵-۵\sqrt{۵}}{-۵}=\sqrt{۵}-۱$$

۲۵۱۲- گزینهٔ ۱ مطابق شـکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۷}$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-۵)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}$$

$$=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$$

کمترین مقدار عبارت $x^۲-۸x+۳۲$ به‌ازای $x=۴$ به‌دسـت می‌آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



۲۵۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}y=۰\\ ۲y-x=۲\end{cases}\Rightarrow x=-۲,\quad \begin{cases}y=۰\\ y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow x=۸$$

$$\begin{cases}۲y-x=۲\\ y+۲x=۱۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۶\\ y=۴\end{cases}$$

پـس مثلـث مورد نظر به صورت زیر اسـت و اندازهٔ میانـهٔ AM را می‌خواهیم. چون M نقطهٔ $(۳,۰)$ است، پس

$$AM=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$